ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Авдеев Вадим Александрович

Исследование вероятностных моделей рейтинговых систем

01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Зубков Андрей Михайлович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Калинкин Александр Вячеславович, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»

кандидат физико-математических наук
Шибанов Олег Константинович, доцент финансов НОУ ВПО «Российская Экономическая Школа»

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН»

Защита диссертации состоится 24 июня 2016 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, 27, сектор «А», и на сайте механико-математического факультета:
http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан « » мая 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико-математических наук, Власов
профессор Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Данная диссертация посвящена нескольким вопросам, связанным с рейтинговыми системами в контексте игр. Будем называть далее рейтинговой системой метод оценивания истинной силы игрока на основе результатов сыгранных им партий.

В настоящее время рейтинговые системы широко применяются в самых разнообразных видах спорта. Помимо такого непосредственного использования, как построение таблиц лидеров и отслеживание игроками своего прогресса, значения рейтингов используются, например, для определения общего уровня соревнований и квалификации игроков на турниры. Также при организации турниров по олимпийской системе рейтинги игроков используются для того, чтобы не допустить встреч и выбывания наиболее вероятных кандидатов в победители на ранних этапах турнира. Наконец, важной задачей в многопользовательских онлайн-играх является подбор соперников близкого уровня для соблюдения сбалансированности матча.

Помимо спортивных дисциплин, рейтинговые системы применяются и в других областях. Например, многие поисковые системы для улучшения качества выдачи используют так называемых асессоров — людей, которые просматривают веб-страницы и определяют их релевантность поисковым запросам[1]. В таком случае для построения итоговой поисковой выдачи применяются аналогичные модели, в которых оценки каждого из асессоров соответствуют игре с победившими и проигравшими в ней сайтами. Кроме того, похожие методы применяются поисковыми системами и для прогнозирования частот переходов по ссылкам (CTR) рекламных объявлений[2], показываемых вместе с поисковой выдачей.

Первые попытки создания рейтинговых систем в спорте относятся к 1920-м годам, представляя собой линейные комбинации заработанных ко-

[1] *Alonso O., Rose D. E., Stewart B.* Crowdsourcing for Relevance Evaluation // ACM SIGIR Forum. 2008. Vol. 42, no. 2. Pp. 9–15.

[2] Web-Scale Bayesian Click-Through Rate Prediction for Sponsored Search Advertising in Microsoft's Bing Search Engine / T. Graepel, J. Q. Candela, T. Borchert, R. Herbrich // Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. 2010. Pp. 13–20.

мандами очков. В 1961 году Шахматная федерация США приняла на вооружение систему Эло[3], ставшую первой статистически обоснованной рейтинговой системой и остающуюся одной из самых популярных систем в настоящее время. Подход модели Эло заключается в изменении рейтинга игрока путем сравнения реального и прогнозируемого результатов его партии с соперником. В 2000-х годах с развитием области онлайн-игр интерес к рейтинговым системам значительно вырос, при этом в силу особенностей многопользовательских игр потребовалось создание более общих рейтинговых систем. В 2006 году в Microsoft Research была разработана байесовская рейтинговая система TrueSkill[4], вычисляющая рейтинги игроков и степени их надежности в общем случае нескольких команд разных размеров. Система TrueSkill и ее вариации остаются наиболее продвинутыми моделями в настоящее время. Более подробный исторический обзор развития области рейтинговых систем приведен в первой главе диссертации.

Цель работы

Цель работы состоит в исследовании рейтинговых систем Эло и TrueSkill; в случае модели Эло анализируется процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Исследован процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником в модели Эло. Доказана локальная сжимаемость возникающей итерационной функциональной системы.

- Доказано, что в модели Эло при любых значениях параметров имеет место сходимость процесса изменения рейтинга игрока к единственному стационарному распределению. В частном случае наличия неко-

[3] *Elo A. E.* The Rating Of Chess Players, Past & Present. 1st ed. Arco Publishing, 1978.

[4] *Herbrich R., Minka T., Graepel T.* TrueSkill™: A Bayesian Skill Rating System // Advances in Neural Information Processing Systems. Vol. 19. 2006. Pp. 569–576.

торых ограничений на параметры модели приводится также дополнительное доказательство, подходящее для более широкого класса процессов.

- Найдена медиана стационарного распределения рейтинга игрока в случае одинаковых уровней мастерства у игрока и его соперника в модели Эло.

- Исследованы свойства рейтинговой системы TrueSkill. Найдена точная формула для апостериорного распределения уровня мастерства в случае двух игроков и получены оценки точности ее аппроксимации.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, математического анализа, а также алгоритмы, использующие графические вероятностные модели. Многократно используются различные свойства нормального распределения и связанные с ним оценки.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты второй главы могут быть использованы в теории случайных процессов и теории итерационных функциональных систем. Результаты третьей главы могут быть полезны для построения более точных с предсказательной точки зрения рейтинговых систем.

Апробация результатов

Результаты работы докладывались автором:

- на семинаре «Дискретные задачи теории вероятностей» кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н. А. М. Зубкова неоднократно в 2013–2015 годах,

- на семинаре отдела дискретной математики Математического института имени В. А. Стеклова под руководством д.ф.-м.н. А. М. Зубкова, д.ф.-м.н. В. П. Чистякова, д.ф.-м.н. В. А. Ватутина в 2014 году,
- на семинаре Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН в 2016 году,
- на Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика РАН А. Н. Ширяева в 2016 году.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах (из них 2 в журналах из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 58 наименований. Объем диссертации составляет 141 страницу.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации обосновывается актуальность рассматриваемых задач, формулируются цели работы и основные результаты.

В **первой главе** приводится исторический обзор исследований по теме работы. В разделе **1.1** описывается развитие рейтинговых систем в области шахмат, использующих онлайн-обучение, то есть комбинирующих всю доступную информацию о прошлых играх в один или несколько параметров. В разделе **1.2** рассматриваются модели для игр с двумя соперниками при условии офлайн-обучения, то есть использующие всю имеющуюся историю о выступлениях игрока при прогнозировании.

Вторая глава посвящена системе Эло. В ней рассматривается вопрос о существовании предельного распределения рейтинга игрока в экстремальном случае наличия только двух игроков.

В разделе **2.1** описывается модель Эло и строится процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником. Предположим, что сила каждого игрока имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(s, \sigma^2)$, где s — уровень его мастерства, а σ — некоторая константа, одинаковая для всех игроков. Пусть игроки A и B в некоторый момент времени имеют рейтинги R_0^A, R_0^B и уровни мастерства s^A, s^B, после чего начинают бесконечную серию игр только друг с другом. Предположим также для простоты, что в играх между ними не бывает ничьих.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\sigma}, \quad \beta = -\frac{R_0^A + R_0^B}{\sqrt{2}\sigma}, \quad q = \Phi\left(\frac{s^A - s^B}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

где $\Phi(\,\cdot\,)$ — функция стандартного нормального распределения. Рассматривается следующая общая модель изменения рейтинга.

Утверждение 2.1. *Рейтинг игрока A после n-й партии имеет следующий вид:*

$$R_n = R_{n-1} - k\Phi(\alpha R_{n-1} + \beta) + kW_n,$$

где все W_n независимы и одинаково распределены, $W_n \sim \mathcal{B}(1, q)$ и q, k, α, β, $R_0 = R_0^A$ — константы, причем $0 < q < 1$ и k, $\alpha > 0$.

В разделе **2.2** вводится итерационная функциональная система $\mathcal{R}$. Для этого определяются следующие функции от $x \in \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = x - k\Phi(\alpha x + \beta),$$
$$f_1(x) = x - k\Phi(\alpha x + \beta) + k,$$

после чего вводится случайная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, принимающая значения $\{f_0(x), f_1(x)\}$ с вероятностями $\{1 - q, q\}$ соответственно.

С ее помощью процесс $\{R_n(x)\}$ записывается следующим образом:

$$R_n(x) = f_{W_n}(R_{n-1}(x)) = (f_{W_n} \circ \ldots \circ f_{W_1})(x),$$

где все f_{W_n} независимы и распределены как f. Кроме того, определяется следующий вспомогательный процесс итераций аргумента:

$$\widetilde{R}_n(x) = (f_{W_1} \circ \ldots \circ f_{W_n})(x), \quad \widetilde{R}_0(x) = x,$$

который используется для доказательства существования стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$ с помощью теоремы, связывающей распределения процессов с прямым и обратным порядком композиции непрерывных случайных функций[5]. В конце этого раздела устанавливается аналогичное утверждение для рассматриваемого случая.

Теорема 2.1. *Пусть предел $\widetilde{R}_\infty(x) = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{R}_n(x)$ существует почти наверное, конечен и не зависит от x. Тогда распределение случайной величины $\widetilde{R}_\infty$ является единственным стационарным распределением процесса $\{R_n(x)\}$.*

В разделе **2.3**, в частности, вводятся следующие определения.

Определение 2.1. *Локальной константой Липшица функции h в точке x называется*

$$L_x(h) = \limsup_{y\to x} \frac{|h(y) - h(x)|}{|y - x|}.$$

Определение 2.5. *Итерационная функциональная система $\mathcal{R}$ называется локально сжимающей, если существует такая функция нормировки $\psi(x) : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, что*

$$\mathsf{E}\Big\{L_x\Big(\widetilde{R}_n\Big)\Big\} \leqslant \psi(x) r^n$$

для некоторого числа $r \in (0, 1)$ и всех $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Понятие локальной сжимаемости позднее используется для доказательства существования стационарного распределения в общем случае $\alpha, k > 0$ с помощью подходящей функции нормировки.

В разделе **2.4** рассматривается частный случай $\alpha k \leqslant \sqrt{2\pi}$, при котором доказать существование стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$ можно следующим образом. Как легко проверить, обе функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ в

[5] *Letac G.* A contraction principle for certain Markov chains and its applications // Random Matrices and Their Applications. Vol. 50. American Mathematical Society, 1986. Pp. 263–273. (Contemporary Mathematics).

случае $\alpha k \leqslant \sqrt{2\pi}$ строго возрастают, поэтому у них существуют обратные функции, и можно рассмотреть марковский процесс

$$\widetilde{R}_n^{-1}(x) = (f_{W_n}^{-1} \circ \ldots \circ f_{W_1}^{-1})(x).$$

Доказав, что для любого x предел $\widetilde{R}_n^{-1}(x)$ при $n \to +\infty$ равняется $\pm\infty$ почти наверное, можно показать, что из этого следует выполнение условий теоремы 2.1, откуда и будет следовать существование единственного стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$.

Преимуществом данного доказательства является тот факт, что свойства функции нормального распределения используются только для доказательства условия $0 \leqslant f_i'(x) < 1$, $i = 0, 1$, а для остальных утверждений важны только непрерывность и строгое возрастание $\Phi(x)$ от 0 до 1.

Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Процесс $\{R_n(x)\}$ имеет единственное стационарное распределение при $\alpha k \leqslant \sqrt{2\pi}$.*

Начиная со следующего раздела, рассматривается общий случай параметров $\alpha, k > 0$. В разделе **2.5** доказываются вспомогательные леммы, используемые в дальнейших рассуждениях.

Раздел **2.6** посвящен доказательству следующей теоремы, основанному на разбиении всей области значений x на отдельные полуинтервалы и рассмотрении 7 различных случаев.

Теорема 2.3. *Для итерационной системы $\mathcal{R}$ условие*

$$\sup_x \mathsf{E}\left\{\frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f)\right\} \leqslant r < 1$$

выполнено с функцией нормировки $\psi(x) = \exp\{c\lambda(x)\}$, где

$$\lambda(x) = \left|\left|x + \frac{\beta}{\alpha}\right| - \frac{k}{2}\right|, \quad c = \frac{\alpha^2 k}{3\left(1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}\right)},$$

и числом

$$r = \max\left\{1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1-q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q\right\}.$$

В разделе **2.7** приводится простое доказательство утверждения из статьи[6], связывающего выполнение условия из теоремы 2.3 с локальной сжимаемостью итерационной системы.

Теорема 2.4. *Если для непрерывной функции* $\psi(x) : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ *выполнено условие*

$$\sup_x \mathsf{E}\left\{\frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f)\right\} \leqslant r < 1,$$

то итерационная функциональная система $\mathcal{R}$ *является локально сжимающей с функцией нормировки* $\psi(x)$.

С ее помощью доказывается основная теорема этой главы.

Теорема 2.5. *Процесс* $\{R_n(x)\}$ *имеет единственное стационарное распределение при* $\alpha, k > 0$.

Кроме того, из доказательства этой теоремы следует оценка скорости сходимости процесса $\{\widetilde{R}_n(x)\}$.

Теорема 2.6. *Для процесса* $\{\widetilde{R}_n(x)\}$ *верно следующее неравенство:*

$$\mathsf{E}\left\{\left|\widetilde{R}_n(x) - \widetilde{R}_\infty(y)\right|\right\} \leqslant r^n \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k\left|x + \frac{\beta}{\alpha}\right| + \frac{1}{3}\alpha^2 k^2\right\} \times \\ \times \left(\frac{k}{1-r}\exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k^2\right\} + |x-y|\exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k|x-y|\right\}\right),$$

где $x, y \in \mathbb{R}$ *и*

$$r = \max\left\{1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1-q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q\right\} < 1.$$

Наконец, в разделе **2.8** рассматривается случай одинаковых уровней мастерства у игрока и его соперника, и находится медиана стационарного распределения рейтинга игрока при этом условии.

Теорема 2.7. *При* $s_A = s_B$ *стационарное распределение симметрично и его медиана* $m = \frac{R_0^A + R_0^B}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

[6] *Steinsaltz D.* Locally Contractive Iterated Function Systems // The Annals of Probability. 1999. Vol. 27, no. 4. Pp. 1952–1979.

Третья глава посвящена исследованию системы TrueSkill. В разделе **3.1** приводится описание рассматриваемой модели. В разделе **3.2** описаны используемые в дальнейшем свойства нормального распределения.

Раздел **3.3** содержит ряд вспомогательных утверждений об аналитических свойствах усеченного нормального распределения $\mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$, которое используется для приближения некоторых распределений, возникающих в процессе работы алгоритма пересчета рейтингов. В частности, для записи математического ожидания и дисперсии случайной величины $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$ вводятся следующие функции:

$$\widetilde{v}(x,l,r) = -\frac{\varphi(r-x) - \varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)},$$
$$\widetilde{w}(x,l,r) = \big(\widetilde{v}(x,l,r)\big)^2 + \frac{(r-x)\varphi(r-x) - (l-x)\varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)},$$

а также их односторонние аналоги:

$$v(x,l) = \lim_{r\to+\infty} \widetilde{v}(x,l,r),$$
$$w(x,l) = \lim_{r\to+\infty} \widetilde{w}(x,l,r),$$

для которых можно вывести явные формулы.

Лемма 3.10. *При всех* $x, l \in \mathbb{R}$

$$v(x,l) = \frac{\varphi(x-l)}{\Phi(x-l)},$$
$$w(x,l) = v(x,l)(v(x,l) + (x-l)).$$

В разделе **3.4** рассказывается о применяемой в системе TrueSkill графической вероятностной модели фактор-графов[7] и алгоритме Expectation Propagation[8], используемом для вычисления маргинальных функций на фактор-графах.

Раздел **3.5** посвящен демонстрации работы алгоритма TrueSkill в случае двух игроков и победы одного из них, в результате чего выводятся следующие формулы для пересчета.

---

[7] *Kschischang F. R., Frey B. J., Loeliger H.-A.* Factor graphs and the sum-product algorithm // IEEE Transactions on Information Theory. 2001. Vol. 47, no. 2. Pp. 498–519.

[8] *Minka T. P.* Expectation propagation for approximate Bayesian inference // Proceedings of the Seventeenth conference on Uncertainty in artificial intelligence. 2001. Pp. 362–369.

Теорема 3.1. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае победы игрока W их параметры пересчитываются следующим образом:*

$$\mu'_W = \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}V, \qquad \mu'_L = \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}V,$$
$$\sigma'_W = \sigma_W\sqrt{1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}W}, \qquad \sigma'_L = \sigma_L\sqrt{1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}W},$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad V = v\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \quad W = w\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

В разделе **3.6** аналогично рассматривается случай ничьей двух игроков, и выводятся следующие формулы.

Теорема 3.2. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае ничьей их параметры пересчитываются следующим образом:*

$$\mu'_W = \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}\widetilde{V}, \qquad \mu'_L = \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}\widetilde{V},$$
$$\sigma'_W = \sigma_W\sqrt{1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}\widetilde{W}}, \qquad \sigma'_L = \sigma_L\sqrt{1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}\widetilde{W}},$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad \widetilde{V} = \widetilde{v}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \quad \widetilde{W} = \widetilde{w}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

В разделе **3.7** рассматривается пример, позволяющий понять схему работы алгоритма TrueSkill в общем случае: первая команда из одного игрока победила, а вторая команда из двух игроков и третья из одного игрока поделили второе и третье место.

Раздел **3.8** посвящен исследованию некоторых свойств системы TrueSkill, а именно, в нем доказываются следующие утверждения, показывающие, что эта сложная система обладает естественными свойствами.

Теорема 3.3. *В модели TrueSkill для двух игроков в случае победы одного из них рейтинг победителя возрастает, а рейтинг проигравшего убывает, то есть*

$$\widetilde{\mu}_W > \mu_W, \quad \widetilde{\mu}_L < \mu_L$$

при победе игрока W над игроком L.

Теорема 3.4. *Пусть до игры рейтинг игрока W был выше, чем рейтинг игрока L, то есть $\mu_W > \mu_L$. Тогда в модели TrueSkill для двух игроков в случае их ничьей рейтинг игрока L возрастает, а рейтинг игрока W убывает, то есть*

$$\widetilde{\mu}_W < \mu_W, \quad \widetilde{\mu}_L > \mu_L.$$

Теорема 3.5. *Пусть до игры рейтинги игроков W и L были равны, то есть $\mu_W = \mu_L$. Тогда в модели TrueSkill для двух игроков в случае ничьей их рейтинги не изменяются:*

$$\widetilde{\mu}_W = \mu_W, \quad \widetilde{\mu}_L = \mu_L.$$

Теорема 3.6. *В модели TrueSkill рейтинги игроков каждой команды в результате пересчета изменяются в одну и ту же сторону.*

Теорема 3.7. *В модели TrueSkill дисперсии игроков каждой команды в результате пересчета уменьшаются.*

В разделе **3.9** находятся точные апостериорные распределения уровней мастерства игроков при отсутствии аппроксимации, после чего происходит сравнение с приближенными распределениями в модели TrueSkill.

Теорема 3.8. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае победы игрока W и отсутствия аппроксимации точные апостериорные плотности распределения их уровней мастерства выглядят следующим образом:*

$$P(s_W) = \varphi\big(s_W, \mu_W, \sigma_W^2\big)\Phi\left(\frac{s_W - \mu_L - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right)\Big/\Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right),$$
$$P(s_L) = \varphi\big(s_L, \mu_L, \sigma_L^2\big)\Phi\left(\frac{-s_L + \mu_W - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right)\Big/\Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right),$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}.$$

Из работы алгоритма следует, что первые два момента точного и приближенного распределений совпадают, поэтому в качестве простого сравнения находится оценка отношения их третьих моментов, причем для упрощения некоторые параметры принимаются равными нулю. Обозначим через M_3

и $\widetilde{M}_3$ третьи моменты распределений уровня мастерства победителя при отсутствии и наличии аппроксимации соответственно.

Теорема 3.9. *Пусть* $\mu_W = \mu_L = \sigma_L = \varepsilon = 0$, $\sigma_W = \sigma$, *тогда*

$$\frac{\widetilde{M}_3}{M_3} = \frac{(3\pi - 4)\sigma^2 + 6\pi\beta^2}{2\pi(\sigma^2 + 3\beta^2)},$$

причем

$$1 > \frac{\widetilde{M}_3}{M_3} \geqslant \frac{3\pi - 4}{2\pi} \approx 0.86.$$

Аналогичная оценка верна и для проигравшего игрока.

Теорема 3.10. *Пусть* $\mu_W = \mu_L = \sigma_W = \varepsilon = 0$, $\sigma_L = \sigma_*$, *тогда*

$$\frac{\widetilde{M}_3^*}{M_3^*} = \frac{(3\pi - 4)\sigma_*^2 + 6\pi\beta^2}{2\pi(\sigma_*^2 + 3\beta^2)},$$

причем

$$1 > \frac{\widetilde{M}_3^*}{M_3^*} \geqslant \frac{3\pi - 4}{2\pi} \approx 0.86,$$

где через M_3^* и $\widetilde{M}_3^*$ обозначены третьи моменты распределений его уровня мастерства при отсутствии и наличии аппроксимации соответственно.

В разделе **3.10** обсуждаются параметры, от которых зависит модель TrueSkill, а также задача правильного подбора оппонентов, главным критерием которого является прогнозируемая вероятность ничьей.

В разделе **3.11** рассматриваются возможные улучшения системы TrueSkill в таких аспектах, как: моделирование ничьих между некоторыми из команд, зависимость силы команды от сил составляющих ее игроков, учет дополнительной информации о заработанных командами очков, и стратегия подбора оппонентов.

Наконец, в разделе **3.12** приводятся доказательства лемм из разделов 3.2 и 3.3.

В **заключении** к диссертации представлены основные результаты работы и возможные дальнейшие темы исследований.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

Исследован процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником в модели Эло. Доказана локальная сжимаемость возникающей итерационной функциональной системы. Доказано, что в модели Эло при любых значениях параметров имеет место сходимость процесса изменения рейтинга игрока к единственному стационарному распределению. В частном случае наличия некоторых ограничений на параметры модели приводится также дополнительное доказательство, подходящее для более широкого класса процессов. Найдена медиана стационарного распределения рейтинга игрока в случае одинаковых уровней мастерства у игрока и его соперника в модели Эло. Исследованы свойства рейтинговой системы TrueSkill. Найдена точная формула для апостериорного распределения уровня мастерства в случае двух игроков и получены оценки точности ее аппроксимации.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с доказательством гипотезы, что стационарное распределение процесса изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником в модели Эло является сингулярным. Кроме того, для обеих систем Эло и TrueSkill представляет интерес вопрос о распределении исходов игры между двумя случайно выбранными игроками. Наконец, естественный интерес представляет исследование поведения совокупности рейтингов при большом числе участников.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя — доктора физико-математических наук Андрея Михайловича Зубкова за постановку задач, обсуждение результатов и ценные замечания.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Авдеев В. А.* Стационарное распределение рейтинга игрока в модели Эло с одним соперником // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 4, С. 3–14. — DOI: 10.4213/dm1299.
   English version: *Avdeev V. A.* Stationary distribution of the player rating in the Elo model with one adversary // Discrete Mathematics and Applications. — 2015. — Vol. 25, № 3, P. 121–130. — DOI: 10.1515/dma-2015-0012.
2. *Авдеев В. А.* Локальная сжимаемость процесса изменения рейтинга игрока в модели Эло с одним соперником // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 1, С. 3–21. — DOI: 10.4213/dm1311.
   English version: *Avdeev V. A.* Local contractivity of the process of a player rating variation in the Elo model with one adversary // Discrete Mathematics and Applications. — 2015. — Vol. 25, № 5, P. 261–276. — DOI: 10.1515/dma-2015-0026.
3. *Авдеев В. А.* Формализация и исследование рейтинговой системы TrueSkill // Деп. в ВИНИТИ. — 2016. — № 33–В2016, С. 68.